

**А.Н. Красовский,**  
доктор физико-математических наук, профессор,  
Институт математики и механики имени Н.Н. Красовского,  
г. Екатеринбург, Россия

**О.А. Сулова,**  
инженер департамента математики, механики и компьютерных наук,  
Уральский государственный федеральный университет  
имени первого Президента России Б.Н. Ельцина,  
г. Екатеринбург, Россия

## ОПТИМИЗАЦИЯ ПОЛЁТА ДРОНА-КВАДРОКОПТЕРА ДО ЦЕЛИ И ОБРАТНО

**Аннотация.** Рассматривается задача об управляемом полёте беспилотного летательного аппарата – квадрокоптера – из места его дислокации – «гнезда» – до заданной цели и его возвращения. Минимизируются затраты энергии на осуществление полёта за заданное время.

**Ключевые слова:** квадрокоптер, «гнездо», цель, управление, оптимизация.

В работе решается задача управления полётом дрона-квадрокоптера до заданной цели и его возвращения обратно за фиксированное время. Задача продолжает исследования авторов из работ [1–3].

Рассматривается конкретный тип квадрокоптера:



Рис. 1. Квадрокоптер

Для указанного типа квадрокоптера время полёта определяется ёмкостью аккумуляторной батареи, обеспечивающей вращение винтов, которые являются управляющими движениями для осуществления заданной траектории движения.

Расчетная схема управляемого движения указанного квадрокоптера согласно [1–3; 8] имеет вид:

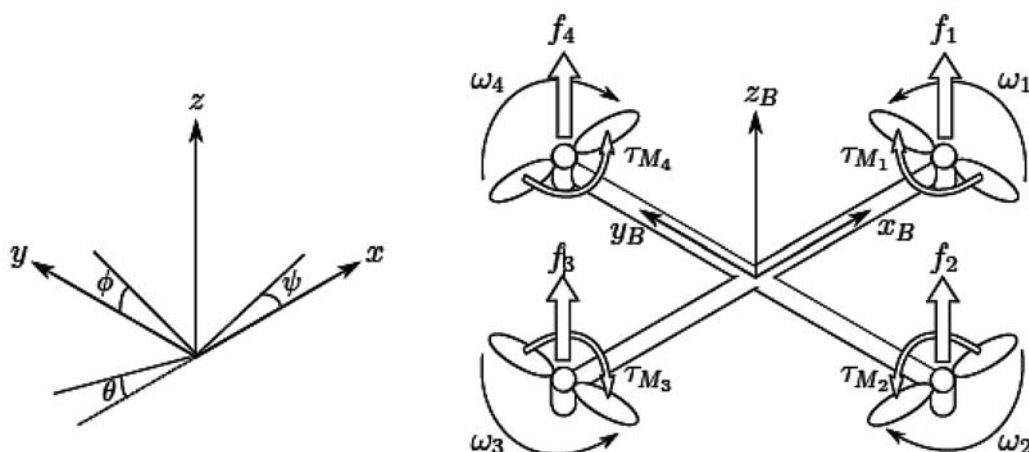


Рис. 2. Расчетная схема квадрокоптера

Согласно [3; 5; 8] математическая управляемая динамическая модель движения квадрокоптера имеет вид:

$$\dot{x} = Ax + Bu + Cv + Dg, \quad t_{нач} \leq t \leq t_{кон},$$

где  $x$  – шестимерный вектор:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 = x \\ x_2 \\ x_3 = y \\ x_4 \\ x_5 = z \\ x_6 \end{bmatrix},$$

$m$  – масса квадрокоптера,  $g$  – ускорение силы тяжести,  $v$  – сила ветра,  $A, B, C, D$  – матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{C_\psi C_g C_\varphi + S_\psi S_\varphi}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{S_\psi S_g S_\varphi - C_\psi C_\varphi}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_g C_\varphi & 0 \end{pmatrix},$$

Здесь матрица  $B$  выбирается постоянной, т.е. мы полагаем углы Эйлера (рис. 1) постоянными и заданными для рассматриваемого полёта. В инерциальной системе отсчета центробежная сила обнуляется. Таким образом, только гравитационная сила  $G = mg$ , величина и направление тяги  $u$  и помеха  $v$  участвуют в ускорении квадрокоптера.

Будем рассматривать задачу, когда помеха (ветер)  $v$  является постоянной во всё время полёта:

$$t_{нач} \leq t \leq t_{кон}.$$

Рассмотрим следующую конкретную задачу. Из состояния покоя в начальный момент времени квадрокоптер поднимается на заданную высоту  $h$  за некоторое фиксированное время. После этого всё дальнейшее движение квадрокоптера до цели происходит в горизонтальной плоскости. Конструируется управление, обеспечивающее его подлёт до заданной цели, также за некоторое фиксированное время. После этого квадрокоптер возвращается назад, также совершая горизонтальный полёт на той же высоте. Выйдя на вертикальную ось, перпендикулярную гнезду, осуществляется его спуск и посадка в «гнездо» (рис. 3).

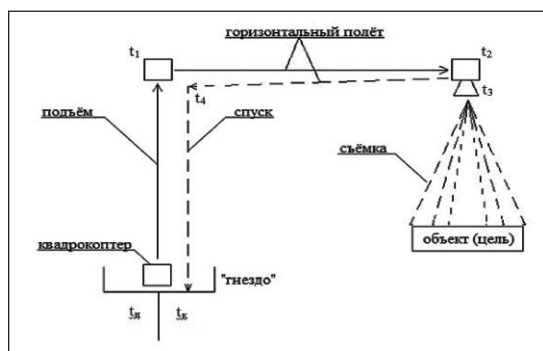


Рис. 3. Схема полёта квадрокоптера до цели и обратно

На каждом этапе полёта квадрокоптеру для осуществления маневра отпускается определенное время. Как было указано выше, суммарное время полёта зафиксировано. Таким образом, здесь возникают естественные ограничения на расстоянии до цели, так как ресурс управляющих воздействий (подъёмных сил винтов) является ограниченным и определяется также энергоёмкостью аккумулятора.

В связи с этим возникает задача построения такого управления, которое на каждом интервале полёта обеспечивает минимум затрат энергии на его осуществление.

В соответствии с теорией оптимального управления [4; 7], разработанной в Свердловской (ныне Екатеринбургской) школе по оптимальному управлению, управляющие воздействия сконструируем следующим образом.

На первом этапе подъёма квадрокоптера на заданную высоту за заданное время будем использовать следующие начальные и конечные условия:

$$t_{нач}, x(t_{нач}) = x_{нач}, t_{кон1} = t_1, z(t_{кон1}) = h, \varphi = \varphi^*, \psi = \psi^*, \vartheta = \vartheta^*,$$

где  $h$  – высота подъёма квадрокоптера. Естественно, предполагается, что эта высота больше высоты цели.

Относительно помехи предполагаем, что на всём отрезке времени управления она остаётся постоянной и неизменной.

Согласно [3; 4] управляющие воздействия (программное управление) имеет вид:

$$u^0(t) = B' X'(t_{кон1}, t)(F)^{-1}(x_{кон} - X(t_{кон1}, t_{нач})x_{нач} - \int_{t_{нач}}^{t_{кон1}} X(t_{кон1}, \tau)Cv(\tau) d\tau + \int_{t_{нач}}^{t_{кон1}} X(t_{кон1}, \tau)Dg d\tau, \\ t_1 \leq t \leq t_2,$$

где

$$X(t, \tau) = \begin{pmatrix} 1 & t-\tau & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t-\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & t-\tau \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} -$$

фундаментальная матрица [4] для решений однородного дифференциального уравнения:

$$\dot{x} = Ax.$$

На этапе горизонтального полёта до цели (рис. 3) решается задача о переводе квадрокоптера из точки над «гнездом» в точку над целью. Граничные условия имеют следующий вид:

$$t_{нач} = t_{кон1}, x(t_{нач}) = x(t_1), t_{кон2} = t_2, \varphi = \varphi^*, \psi = \psi^*, \vartheta = \vartheta^*.$$

В соответствии с вышеизложенным управление, решающее эту задачу, имеет вид:

$$u^0(t) = B' X'(t_{кон1}, t)(F)^{-1}(x_{кон} - X(t_{кон1}, t_{нач})x_{нач} - \int_{t_1}^{t_{кон2}} X(t_{кон1}, \tau)Cv(\tau) d\tau + \int_{t_1}^{t_{кон2}} X(t_{кон1}, \tau)Dg d\tau, \\ t_3 \leq t \leq t_4,$$

На третьем этапе решается задача о возвращении квадрокоптера от цели в точку, лежащую на вертикали, перпендикулярную плоскости «гнезда». При этом предполагается, что квадрокоптер некоторое время зависает над целью, например для видеосъёмки. Тогда перелёт на этом этапе начинается в момент времени  $t_3$  и заканчивается в момент времени  $t_4$  (рис. 3). Тогда для решения этой задачи используются следующие граничные условия:

$$t_{нач} = t_3, x(t_{нач}) = x(t_3), t_{кон3} = t_4, \varphi = \varphi^*, \psi = \psi^*, \vartheta = \vartheta^*.$$

Управление, решающее эту задачу, имеет вид:

$$u^0(t) = B' X'(t_4, t) (F)^{-1} (x_{кон} - X(t_4, t_3) x_{нач} - \\ - \int_{t_3}^{t_4} X(t_4, \tau) C v(\tau) d\tau) + \int_{t_3}^{t_4} X(t_{кон1}, \tau) D g d\tau, \\ t_3 \leq t \leq t_4,$$

На последнем этапе квадрокоптер по вертикали спускается вниз. При этом граничные условия для решения задачи управления имеют следующий вид:

$$t_{нач} = t_4, x(t_{нач}) = x(t_4), t_{кон} = t_k, \varphi = \varphi^*, \psi = \psi^*, \vartheta = \vartheta^*.$$

Управление, решающее эту задачу, имеет вид:

$$u^0(t) = B' X'(t_4, t) (F)^{-1} (x_{кон} - X(t_4, t_k) x_{нач} - \\ - \int_{t_4}^{t_k} X(t_4, \tau) C v(\tau) d\tau) + \int_{t_4}^{t_k} X(t_k, \tau) D g d\tau, \\ t_4 \leq t \leq t_k,$$

Итак, мы построили программное управление, складывающееся из четырёх управлений, решающих соответствующие задачи. Известно, что так построенное управление является оптимальным по критерию качества [7]:

$$\gamma = \int_{t_u}^{t_k} u^2(t) dt,$$

характеризующим затраты энергии на выработку управляющих воздействий.

Хотя работа носит теоретический характер, авторами предложен [3] способ посадки квадрокоптера в «гнездо», позаимствованный из космической отрасли, а именно способ стыковки космических аппаратов [6].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский А.Н., Сулова О.А. Упрощенная математическая модель управляемого движения квадрокоптера / А.Н. Красовский // Наукові записки Международного гуманітарного університету. – 2016. – Вып. 26. – С. 146–150.
2. Красовский А.Н., Сулова О.А. О математической модели управляемого движения дрона-квадрокоптера / А.Н. Красовский // Аграрный вестник Урала. – 2016. – № 4. – С. 55–59.
3. Красовский А.Н., Сулова О.А. Об оптимальном управлении движением дрона-квадрокоптера по критерию качества затрат энергии / А.Н. Красовский // Успехи современной науки и образования. – 2017. Т.4. – № 3. – С. 193–197.
4. Красовский Н.Н. Теория управления движением / Н.Н. Красовский. – М.: Наука, 1968.
5. Огольцов И.И., Рожнин Н.Б., Шеваль В.В. Разработка математической модели пространственного полета квадрокоптера / И.И. Огольцов // Труды МАИ. – 2015. – Вып. 83.
6. Трушляков В.И., Шатров Я.Т., Юткин Е.А., Макаров Ю.Н., Олейников И.И. Способ стыковки космических аппаратов / В.И. Трушляков // Патент 2521082, 2010.
7. Krasovskii A.N., Krasovskii N.N. Control Under Lack of Information: Birkyauzer, Boston, USA. 1995.
8. Luukkonen T. Modelling and control of quadcopter // Independent research project in applied mathematics, Espoo, Finland, 2011.

**А.Н. Красовський, О.А. Сулова. Оптимізація польоту дрона-квадрокоптера до цілі і назад. – Стаття.**

**Анотація.** Розглядається задача про керований політ безпілотного літального апарату – квадрокоптеру з місця його дислокації – «гнізда» – до заданої цілі і його повернення. Мінімізуються витрати енергії на здійснення польоту за заданий час.

**Ключові слова:** квадрокоптер, «гніздо», ціль, управління, оптимізація.

**A. Krasovskiy, O. Suslova. Optimization of dron-quadcopter flight to purpose and back. – Article.**

**Summary.** The problem of a controlled flight of an unmanned aerial vehicle – a quadcopter from the place of its dislocation – the „nest” to a specified goal and its return is considered. Minimized energy costs for the flight for a specified time.

**Key words:** quadcopter, „nest”, goal, control, optimization.