УДК 517.95,518.517

В.М. Колодяжний,
доктор фізіко-математичних наук, професор
О.Ю. Лісіна,
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
Харківський національний автомобільно-дорожній університет,
м. Харків, Україна

ЗАСОБИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ МАТЕМАТИКИ (*R*-ФУНКЦІЇ ТА АТОМАРНІ ФУНКЦІЇ) І ЇХ ВИКОРИСТАННЯ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Анотація. *Розглянуті базові ідеї, що покладені в основу теорії R-функцій та теорії атомарних функцій, напрямки розвинення та застосування засобів цих теорій при створенні методів обчислювальної математики для вирішення задач математичного моделювання.*
Ключові слова*: методи обчислювальної математики, теорія R-функції, теорія атомарних функцій, математичне моделювання.*

Розв'язання сучасних актуальних науково-технічних проблем суттєво базуються на використанні математичних методів. В той же час використання комп'ютерів при вирішенні задач в прикладних галузях математики (теорії диференціальних та інтегральних рівнянь, теорії наближень, теорії екстремальних задач та інших) визначило обчислювальну математику як науку в значній мірі експериментальну. Проведення математичного експерименту при дослідження конкретної прикладної математичної задачі зв'язане з пошуком такого наближеного розв'язку задачі, що задовольняє цілям відповідної галузі науки та техніки, в якій розглядається задача. Математичний експеримент базується на застосуванні таких обчислювальних засобів, які повинні забезпечувати необхідну точність отриманого результату, можливість поточного контролю за процесом дослідження та достатньо зрозумілу форму подання результатів дослідження та ін. Треба вирішувати проблеми зручного вводу в комп'ютер вихідної інформації та зображення вихідної інформації в формі, зрозумілій для дослідника. На основі вказаного виділимо деякі з можливих труднощів, що виникають при проведенні математичного експерименту при дослідженні реальних проблем з використанням можливостей комп'ютера. Одну, необхідність переводу «неперервної» «нескінченної» інформації в вихідній задачі в «дискретну» «скінченну». Другу, можливість зведення вихідної задачі до більш простої, яка вимагає використання скінченного числа операцій в комп'ютері. Для вирішення першої проблеми ми застосовуємо математичні засоби теорії *R*-функцій. Використання цих засобів дозволяє виписувати рівняння геометричних об'єктів довільної форми, зокрема, рівняння частин ліній чи поверхонь, будь-яке їх об'єднання. Наприклад, поверхні двотаврової балки, поршня двигуна внутрішнього згоряння, машинобудівної конструкції довільної складності, будинку і т.д. Друга проблема вирішується на основі теорії атомарних функцій, яка сформувала новий напрямок теорії наближень функцій (яку називають теорією апроксимації або конструктивною теорією функцій). Вказані теорії (*R*-функцій та атомарних функцій) були винайдені харківськими математиками В.Л. Рвачовим та В.О. Рвачовим, отримали всесвітнє визнання [1-3], і продовжуються розвиватися та вдосконалюватись. Метою даної статті є висвітлення базових ідей, що покладені в основу теорії *R*-функцій та теорії атомарних функцій, напрямків їх розвинення та застосування засобів цих теорій при використанні методів обчислювальної математики для розв'язування задач математичного моделювання.

Теорія *R*-функцій. Побудова теорії *R*-функцій пов'язана з широким колом науково-технічних проблем при вирішенні яких необхідно враховувати геометричну інформацію. Мова йде не про просте кодування геометричної інформації, а її описування в формі, яка прийнята в аналітичній геометрії, тобто за допомогою рівнянь або нерівностей. Якщо розглядається складний геометричний об'єкт, наприклад машинобудівна конструкція тощо, то її описування здійснюється побудовою рівняння $f(x)=0, \quad x \in R^n$ (або нерівності $f(x) \geq 0$). Цю задачу відносять до зворотної задачі аналітичної геометрії – для заданого геометричного об'єкту треба побудувати його рівняння. Пряма задача визначається необхідністю для заданого рівняння $f(x)=0, \quad x \in R^n$ знайти відповідний в просторі R^n геометричний об'єкт, тобто визначити сукупність всіх точок R^n, які справджують рівнянню $f(x)=0$. До появи теорії *R*-функцій зворотна задача розглядалася лише для простих геометричних об'єктів: прямої, конічних перерізів, еліпсоїдів, параболоїдів та ін. В загальному вигляді поняття *R*-функції узагальнюється до поняття *R*- відображення, в основі якого лежить виділення з систем алгебраїчних операцій (тобто відображень виду $f: \aleph^n \to \aleph$, де $\aleph$ – деяка множина) таких операцій, які відповідають у визначеному сенсі функціям *k*-значної логіки – тобто алгебраїчним операціям вигляду.

Розглянемо, наприклад, функції $f_1(x_1,x_2)=x_1x_2$, $f_2(x_1,x_2)=x_1+x_2-\sqrt{x_1^2+x_2^2}$, $f_3(x_1,x_2)=(x_1+x_2+\sqrt{x_1^2+x_2^2})(x_1^2+x_2^2)$ та інші. Для даних функцій має місце властивість: знак функцій повністю визначається знаками аргументів цих функцій, незалежно від їх абсолютної величини. Побудуємо таблицю, в першій частині якої виписані знаки аргументів та відповідні знаки функцій, що розглядаються.

Знак аргументу x_1	–	–	+	+	X_1	0	0	1	1
Знак аргументу x_2	–	+	–	+	X_2	0	1	0	1
Знак функції $f_1(x_1,x_2)$	+	–	–	+	F_1	1	0	0	1
Знак функції $f_2(x_1,x_2)$	–	–	–	+	F_2	0	0	0	1
Знак функції $f_2(x_1,x_2)$	–	+	+	+	F_3	0	1	1	1

В наступній частині таблиці знак аргументу x_1 позначимо великою літерою X_1, знак аргументу x_2 – літерою X_2, і значення змінних X_1, X_2 визначаються величинами 0 або 1, що відповідає наступному: знак «+» замінюємо на «1», знак « – » на «0»; змінні, які відповідатимуть знакам функцій $f_1(x_1,x_2)$, $f_2(x_1,x_2)$, $f_2(x_1,x_2)$ будемо позначати відповідно F_1,F_2,F_3. Таким чином ми одержуємо функції F_1,F_2,F_3, значення яких і значення аргументів X_1,X_2 будуть дорівнювати величинам «0» або «1». Ці функції відомі під назвою функцій алгебри логіки або булевих функцій (на честь англійського вченого Д. Буля, який відомий в зв'язку з дослідженнями обчислення висловлювань). В наведеному прикладі функціям звичайних неперервних аргументів ($f_1(x_1,x_2)$, $f_2(x_1,x_2)$, $f_2(x_1,x_2)$ відповідають булеві функції $F_1(X_1,X_2)$, $F_2(X_1,X_2)$, $F_2(X_1,X_2)$. Вказані відношення положено в основи до становленню теорії *R*-функцій, яка повно викладена в роботі [2]. На основі цієї теорії можна будувати рівняння геометричних об'єктів практично довільної форми. Процедура отримання шуканих рівнянь базується на наступному. Складний об'єкт розглядається як сукупність простих об'єктів, для яких існує відповідне рівняння або нерівність, які описують цей об'єкт. Складний об'єкт описується за допомогою операцій алгебри множин у вигляді формули, яка дозволяє вихідний складний об'єкт представити сукупністю простих об'єктів. При побудові такої формули застосовуються, як правило, наступні операції над множинами: перетин, об'єднання, доповнення тощо. Вказані операції теорії множин замінюються відповідними операціями теорії *R*-функцій, наприклад, *R*-кон'юнкцією ($\underset{R}{\wedge}$), *R*-диз'юнкцією ($\underset{R}{\vee}$), *R*-від'ємністю ($\neg$) і т.д. Ці операції визначаються відповідними *R*-функціями, наприклад:

$x_1 \underset{R}{\wedge} x_2 \equiv x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $x_1 \underset{R}{\vee} x_2 \equiv x_1 + x_2 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $\neg x_1 \equiv -x_2$. Зміст *R*-операцій розкривається сутністю відповідних *R*-функцій, які мають в якості супроводжуючих операції кон'юнкції, диз'юнкції, від'ємність алгебри Буля. Нехай складна область Ω, формується за допомогою двох областей Ω_1 і Ω_2, описи яких відомі: Ω_1 – область, що розташована нижче синусоїди $y = \sin x_1$; ця область описується нерівністю: $\sin x_1 - x_2 \geq 0$; Ω_2 – область представляє собою круг радіуса π з центром в початку координат: ця область описується нерівністю: $\pi^2 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0$. Застосовуючи операцію «перетин» алгебри множин, представляємо область $\Omega = \Omega_1 \bigcap \Omega_2$. Для побудови шуканої *R*-функції, яка буде описувати вихідну область у вигляді рівняння $f(x_1, x_2) = 0$, треба у формулі $\Omega = \Omega_1 \bigcap \Omega_2$ замінити символи Ω_1 і Ω_2 на відповідні ліві частини нерівностей, що описують визначені області Ω_1 і Ω_2, а символ $\bigcap$ – на символ *R*-операції $\underset{R}{\wedge}$. В результаті отримуємо:

$$f(x_1, x_2) = (\sin x_1 - x_2) \underset{R}{\wedge} (\pi^2 - x_1^2 - x_2^2) \Rightarrow$$

$$f(x_1, x_2) = \sin x_1 - x_2 + \pi^2 - x_1^2 - x_2^2 - \sqrt{(\sin x_1 - x_2)^2 + (\pi^2 - x_1^2 - x_2^2)^2} = 0.$$

З загальних позицій задача описування складних областей детально описана в роботах [2, 7]. Існують комп'ютерні програмні продукти, які дозволяють отримати опис складних об'єктів, інформацію про які можна знайти в[6,7,10].

Теорія атомарних функцій. Атомарні функції представляють собою математичний апарат конструктивної функцій, за допомогою яких можна будувати поліноми, що поєднують достоїнства класичних степеневих та тригонометричних поліномів (нескінченну диференційованість та апроксимаційну універсальність) та сплайнів (існування локального базису). Сплайни не універсальні. То виникає задача про побудову нескінченно диференційованих фінітних (тобто з компактним носієм) функцій. Фінітні сплайни степеня n можна отримати в результаті n-кратної згортки характеристичних функцій інтервалів. Шукані фінітні функції треба відшукувати як нескінченно кратні згортки характеристичних функцій інтервалів. При отриманні фінітних функцій довжини інтервалів повинні прямувати до нуля достатньо швидко, але сума їх довжин повинна бути скінченою. Позначимо шукану функція через $\varphi(x)$, а її Фур'є перетворення нехай має вигляд $\tilde{\varphi}(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_k t}{\alpha_k t}$, де α_k монотонно прямує до нуля, $\alpha_k > 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k < \infty$. Якщо вибрати α_k геометричною прогресією – $\alpha_k = 2^{-k}$, то зворотне перетворення Фур'є дозволяє отримати фінітну нескінченно диференційовану функцію, яку будемо позначати $up(x)$: $up(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2^{-k} t}{2^{-k} t} dt$. Первісно необхідність побудови такої функції з'явилась на семінарі В.Л. Рвачова, який ще в 1967 р. поставив наступну задачу. Нехай графік фінітної диференційованої функції $\varphi(x)$ має вигляд горбика, а носій – відрізок [-1, 1]. Графік похідної від такої функції $\varphi(x)$ матиме вигляд горбика, що направлений вверх (на ділянці зростання вихідної функції), та зсунутого перевернутого до низу горбика (на ділянці спадання вихідної функції). Висувалась умова, щоб похідна від вихідної функції $\varphi(x)$ представлялася через саму функцію (стиснуту, зсунуту та де треба перевернуту). Співвідношення між графіками функції $\varphi(x)$ та її похідної можна задати у вигляді рівняння: $\varphi'(x) = a[\varphi(2x+1) - \varphi(2x-1)]$. Доведення існування та єдності фінітного розв'язку цього рівняння (такий розв'язок існує при $a = 2$) з інтегралом, який дорівнює одиниці, було виконане в роботі. Знайдений розв'язок був позначений через $up(x)$. Ця функція отримала назву атомарної функції і було доведено, що довільний степеневий поліном може бути представлений зсувами стиснень лінійних комбінацій цієї функції. Були виявлені інші чудові властивості отриманої атомарної функції $up(x)$ та побудовані, під керівництвом В.О. Рвачова, різні класи атомарних функцій. Практичне значення набули також атомарні функції багатьох змінних [5], які використовуються при розв'язуванні крайових задач математичної фізики.

Застосування теорій *R*-функцій та атомарних функцій в математичному моделюванні фізичних процесів. Математичні засоби теорії *R*-функцій дозволили розвинути нові методи розв'язування крайових задач, які являються математичними моделями при дослідженні фізичних процесів в складних областях. Відмітимо метод *R*-функцій (або структурно-варіаційний метод) розв'язування крайових задач математичної фізики. Поява атомарних функцій також сприяло розвиненню нових підходів для вирішення крайових задач. Узагальнення поняття атомарної функції на випадок декількох змінних привело до появи нових класів нескінченно диференційованих функцій з компактним носієм, які отримали такі позначення: $Plop(x_1,x_2)$, $Corp(x_1,x_2,x_3)$, $Blop(x_1,x_2)$, $Dorp(x_1,x_2,x_3)$, $Hlop(x_1,x_2)$, $Horp(x_1,x_2,x_3)$ та інші. Такі функції з'явилися в результаті розв'язування функціонально-диференціальних рівнянь спеціального вигляду, а саме

$$Lu(\tilde{o}) = \lambda \int\limits_{\partial S} u[a(x-\xi)]\,ds + \mu u(ax),$$

де $\tilde{o} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$; L – диференційний оператор виду: Δ, $\Delta\Delta$, $\Delta + c^2$, $\Delta - c^2$: $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \partial^2 / \partial x_i^2$; ∂S – границя області, що визначає носій фінітної функції.

Поява атомарних функцій багатьох змінних дало поштовх для їх застосування, зокрема, атомарних радіальних базисних функцій (АРБФ), в безсіткових схемах. Ці схеми дозволяють спростити обчислювальні алгоритми розв'язування крайових задач в 2D або 3D областях. Описування відповідних областей, в яких розглядається крайова задача, здійснюється засобами теорії *R*-функцій. Побудовані *R*-функції, що описують область, допомагають відслідковувати геометричні особливості області. Наближений розв'язок крайової задачі будується за безсітковою схемою на основі використання (АРБФ). Приклади такого підходу розглянуті в роботах [8; 9].

Висновки. В статті розглянуто можливі схеми дослідження математичних моделей (крайових задач) при математичному моделюванні фізичних процесів в складних областях. Подана інформація розрахована на аспірантів та наукових співробітників, які в своїх роботах мають справу з необхідністю використовувати методи комп'ютерного моделювання. Запропоновані авторами підходи дозволять розширити можливості числових алгоритмів при проведенні математичних обчислювальних експериментів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Рвачев В.Л. Неклассические методы теории приближений в краевых задачах / Рвачев В.Л., Рвачев В.А. – Киев: Наук. думка, 1979. – 196 с.
2. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 551 с.
3. Lemairié-Rieusset Pierre Guilles. Fonctions d'échelle interpolantes, polynômes de Bernstein et ondelettes non stationnaires // Revista Matemática Iberoameri-cana. Vol. 13, No 1, 1997. – P. 91–188.
4. Рвачов В.Л. Про одну фінітну функцію / Рвачов В.Л., Рвачов В.О. // ДАН УРСР. Сер. А, № 8, 1971. – С. 705–707.
5. Колодяжный В.М. Атомарные функции. Обобщения на случай многих переменных и перспективные направления практических приложений / Колодяжный В.М., Рвачев В.А. // Кибернетика и системный анализ, № 6, 2007. – С. 155–177.
6. Теория R-функций и актуальные проблемы прикладной математики. / Стоян Ю.Г., Проценко В.С., Манько Г.П., Гончарюк И.В, Курпа Л.В., Рвачев В.А., Синекоп Н.С., Сироджа И.Б., Шевченко А.Н., Шейко Т.И. – К.: Наук. думка, 1986. – 262 с.
7. Максименко-Шейко К.В. –функции в математическом моделировании геометрических объектов и физических полей / К.В. Максименко-Шейко. – Харьков: ИПМаш НАН Украины, 2009. – 306 с.

8. Колодяжный В.М. Численные схемы решения краевых задач на основе бессеточных методов с использованием РБФ и АРБФ / В.М. Колодяжный, О.Ю. Лисина –Проблемы машиностроения – Т.13, №4. – 2010. – С. 49–56.
9. Колодяжный В.М. Построение дискретных моделей геометрических объектов / В.М. Колодяжный, Д.А. Лисин, А.А. Лисняк, С.В. Чопоров. Харьков: ХНАДУ, 3013. – 265 с.
10. Лісін Д.О. Комп'ютерна програма «Система комп'ютерного моделювання фізичних процесів з використанням без сіткового підходу і атомарних радіальних базисних функцій СКМ-АФ/ Д.О. Лісін, В.М. Колодяжний // Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір. № 47194. – 2013.

В.М. Колодяжный, О.Ю. Лисина. Средства вычислительной математики (R-функции и атомарные функции) и их использование при решении задач математического моделирования. – Статья.

Аннотация. *Рассмотрены базовые идеи, которые положены в основу теории R-функций и теории атомарних функций, направления развития и использования средств этих теорий при создании методов вычислительной математики для решения задач математического моделирования.*

Ключевые слова*: методы вычислительной математики, теория R-функций, теория атомарних функций, математическое моделирование.*

Vladimir M. Kolodyazhny, Olga Yu. Lisina. Computational Mathematics Tools (R-functions and Atomic Functions) and Their Use in Solving Problems of Mathematical Modeling. – Article.

Summary. *We consider the basic ideas that form the basis of the theory of R-functions and the theory of atomic functions, directions of development and use of these theories in the creation of computational mathematics methods for solving problems of mathematical modeling.*

Key words*: methods of calculus, R-functions theory, atomic functions theory, mathematical modeling.*

УДК 130.2:140

А.А. Косолапов,
доктор технических наук, профессор,
Днепропетровский национальный университет
железнодорожного транспорта им. акад. В. Лазаряна,
г. Днепропетровск, Украина

ФИЛОСОФСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ИНФОРМАТИЗАЦИИ ОБЩЕСТВА

Аннотация. *В статье рассматриваются этапы компьютеризации общества и развитие тенденций негативного влияния информационных технологий и интернет на человека.*

Ключевые слова: *компьютеризация, информатизация, интернет, философско-антропологические проблемы.*

Тем, кого боги хотят уничтожить,
они сначала дают голубой экран.
Мы становимся расой созерцателей,
а не созидателей…
(Артур Кларк)
http://esquire.ru/wil/arthur-clarke

Введение. Вопросам философско-антропологического осмысления изменений, происходящих в обществе в условиях его спонтанной компьютеризации и информатизации, уделяется большое внимание, начиная с момента появления первого компьютера (1944г.), выполняющего