А.Н. Красовский,
доктор физико-математических наук,профессор,
член-корреспондент Российских академий естественных и инженерных наук,
Уральский государственный аграрный университет,
г. Екатеринбург, Российская Федерация

ОБ ОТСЛЕЖИВАНИИ ДВИЖЕНИЙ РЕАЛЬНОГО ДИНАМИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА И ЕГО КОМПЬЮТЕРНОЙ МОДЕЛИ-ПОВОДЫРЯ

Рассматривается задача управления по принципу обратной связи о стохастическом взаимном отслеживании движений реального объекта и его компьютерной модели-поводыря (лидера) [1] при дефиците (неполной) информации о действующих динамических помехах [2].

Исследования, приведенные в работе, поддержаны Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 14–01–00065).

Рассматривается динамический объект, описываемый нелинейным векторным обыкновенным дифференциальным уравнением [1]:

$$\dot{x} = A(t)x + f(t,u,v), \qquad t_0 \le t \le \vartheta, \tag{1}$$

где: $x \in R^n$ – фазовый вектор объекта,

$u \in P = \{u^{[1]},\dots,u^{[M]}\}$ – *управление,*

$v \in Q = \{v^{[1]},\dots,v^{[N]}\}$ – *помеха,*

отрезок времени управления $[t_0, \vartheta]$ зафиксирован.

Для выбранного разбиения: $\Delta\{t_k\} = \{t_0, t_1, \dots t_k < t_{k+1}, \dots t_K = \vartheta\}$

рассматриваемый объект (1) описываем конечно-разностным дифференциальным уравнением:

$$x[t_{k+1}] = x[t_k] + (A(t_k)\,x[t_k] + f(t_k,u,v))\,(t_{k+1} - t_k). \tag{2}$$

Для *реального* объекта (1) рассматривается *абстрактная* w-модель:

$$w[t_{k+1}] = w[t_k] + (A(t_k)\,w[t_k] + \widetilde{f}_{pq}(t_k))\,(t_{k+1} - t_k),$$

$$\widetilde{f}_{pq}(t_k) = \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} f(t_k, u^{[i]}, v^{[j]})\; p_i\; q_j \tag{3}$$

Здесь числа: $p_i, i=1,\dots,M, \quad q_j, j=1,\dots,N$

удовлетворяют условиям: $p_i \ge 0, i=1,\dots,M, \ \sum_{i=1}^{M} p_i = 1, \qquad q_j \ge 0, j=1,\dots,N, \ \sum_{j=1}^{N} q_j = 1.$

Управляющие воздействия для объекта и модели-поводыря, которые обеспечивают устойчивое взаимное отслеживание движений x-объекта (1), (2) и w-модели (3), строятся следующим образом.

В момент времени: $t_k, k=0,\dots,K-1$

вектор *управления* $u^0[t] = u^0[t_k] \in P, t \in [t_k, t_{k+1})$

для реального x-объекта (1), (2) выбирается в результате случайного испытания так что:

$$P_{ВЕР}(u^0[t_k] = u^{[i]} \in P) = p_i^0, \ i = 1,\dots, M.$$

Вероятности (которые и играют роль «*оптимальных управлений*»):

$$p_i^0 : \ p_i^0 \ge 0, \ \sum_{i=1}^{M} p_i^0 = 1$$

выбираем из условия, которое назовем *условием минимаксного экстремального сдвига:*

$$\min_p \max_q < l^*[t_k], \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} f(t_k, u^{[i]}, v^{[j]})\, p_i q_j > =$$
$$= < l^*[t_k], \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} f(t_k, u^{[i]}, v^{[j]})\, p_i^0 q_j^* > \qquad (4)$$

при:

$$p_i \ge 0,\ i = 1,...,\ M,\ \ \sum_{i=1}^{M} p_i = 1, \qquad q_j \ge 0,\ j = 1,..., N,\ \ \sum_{j=1}^{N} q_j = 1.$$

Здесь:

$$l^*[t_k] = x[t_k] - w[t_k].$$

«Управляющее воздействие» $q^0[t_k]$ для компьютерной w-модели (3) выбираем из условия, которое назовем *условием максиминного экстремального сдвига:*

$$\max_q \min_p < l^*[t_k], \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} f(t_k, u^{[i]}, v^{[j]})\, p_i q_j > =$$
$$= < l^*[t_k], \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} f(t_k, u^{[i]}, v^{[j]})\, p_i^* q_j^0 > . \qquad (5)$$

Вероятности $\{q_j\}$, которые определяют помехи $v[t_k] \in Q$ для x-объекта и «действия» $\{p_i\}$ для w-модели могут быть любыми.

Теорема. *Выбор управлений из условий (4), (5) экстремальных сдвигов для любых выбранных чисел $V^* > 0$ и $0 < \beta < 1$ обеспечивает близость движений объекта и модели-лидера по следующей оценке:*

$$P_{ВЕР}(V(t, l[t]) \le V^*,\ \ \forall t \in [0, \vartheta]) \ge 1 - \beta,$$
$$V(t, l[t]) = V(t, x[t], w[t]) = \left| x[t] - w[t] \right|^2 e^{-2\lambda t}, \qquad (6)$$

где $\lambda > 0$ некоторая заданная константа [1].

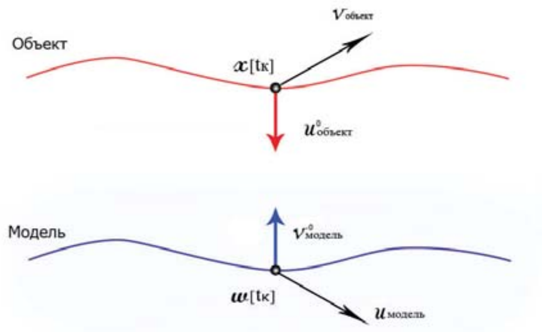


Схема отслеживания движений.

Пример.

Объект:

$$\dot{x} = A(t)x + f(t, u, v), \quad 0 \le t \le \vartheta,$$
$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$u \in P = \{u^{[1]} = -1,\ u^{[2]} = 1\},$$

$$v \in Q = \{v^{[1]} = -1,\ v^{[2]} = 1\}.$$

$$f(t,u,v)=\begin{cases} 0,5u+(u+v)^2+v \ \ for \ \ t\in[0,\frac{\vartheta}{4})\bigcup[\frac{\theta}{2},\frac{3\vartheta}{4}), \\ u+(u+v)^2+0,5v \ \ for \ \ t\in[\frac{\vartheta}{4},\frac{\theta}{2})\bigcup[\frac{3\theta}{4},\vartheta]. \end{cases}$$

Модель-поводырь:

$$w[t_{k+1}]=w[t_k]+(A(t_k)\,w[t_k]+\widetilde{f}_{pq}(t_k))(t_{k+1}-t_k),$$

$$\widetilde{f}_{pq}(t_k)=\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}f(t_k,u^{[i]},v^{[j]})\,p_i\,q_j$$

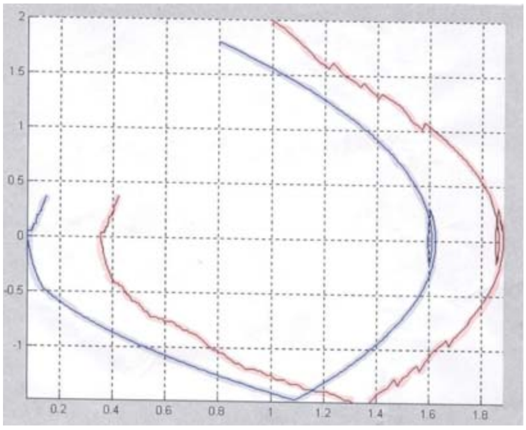
Здесь числа:

$$p_i,\, i=1,2\,, \qquad q_j, j=1,2\ :$$

$$p_i\geq 0, i=1,2, \ \sum_{i=1}^{2}p_i=1, \qquad q_j\geq 0, j=1,2, \ \sum_{j=1}^{2}q_j=1.$$

Начальные условия:

$$x_1[0]=1.0,\ x_2[0]=2.0,$$
$$w_1[0]=0.8,\ w_2[0]=1.8,$$
$$\vartheta=4,\ \Delta t=t_{k+1}-t_k=\delta=0.01\ .$$



Траектории движений. Правая линия – x-объект, левая линия – w-модель.

ЛИТЕРАТУРА

1. Krasovskii A. N. On a mutual tracking block for the real object and its virtual model-leader // Contributions to Game Theory and Management.Vol.VI, 2013.
2. Krasovskii A. N., Krasovskii N. N. Control Under Lack of Information. Birkhauzer, Boston, USA, 1994.