В. М. Запека,
студент VI курсу,
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»

ЗАГАЛЬНА СХЕМА МЕТОДУ РОЗВ’ЯЗУЮЧИХ ФУНКЦІЙ ПРИ МОДЕЛЮВАННІ ДИНАМІЧНОЇ ГРИ

Позначимо $\mathbb{R}_+ = \{t: t \geq 0\}$ позитивну піввісь і розглянемо динамічну систему, еволюція якої описується рівнянням

$$z(t) = g(t) + \int_0^t \Omega(t,\vartheta)\varphi\big(u(\vartheta), v(\vartheta)\big)d\vartheta, \quad t \geq 0. \qquad (1)$$

Функція $g(t), g: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$, є вимірною (по Лебегу) і обмеженою при $t > 0$, матрична фунція $\Omega(t,\vartheta), t \geq \vartheta \geq 0$, вимірна по t, також являється сумовною по ϑ при будь-якому $t \in \mathbb{R}_+$. Блок керування задається функцією $\varphi(u,v), \varphi: U \times V \to \mathbb{R}^n$, яка передбачається безперервною по сукупності змінних на прямому добутку непустих компактів U і V, тобто $U \in K(\mathbb{R}^p), V \in K(\mathbb{R}^q)$. Керуючі впливи гравців $u(\vartheta), u: \mathbb{R}_+ \to U$, и $v(\vartheta), v: \mathbb{R}_+ \to V$, є вимірними функціями.

Крім системи (1) задана термінальна множина M^*, яка має циліндричний вигляд

$$M^* = M_0 + M, \qquad (2)$$

де M_0 – лінійний підпростір з $\mathbb{R}^n$; $M \in K(L)$, де L – ортогональне доповнення до M_0 в $\mathbb{R}^n$.

Цілі першого (P) і другого (E) гравців протилежні. Перший прагне привести траєкторію системи (1) на множину (2) за найкоротший час, другий – максимально відтягнути момент влучення траєкторії на множину M^*.

Приймемо сторону першого гравця й будемо орієнтуватися на вибір супротивників як керування довільної вимірної функції зі значеннями з V. У свою чергу, будемо припускати, що якщо гра (1), (2) відбувається на інтервалі $[0,T]$, то керування першого гравця є вимірна функція вигляду

$$u(t) = u\big(g(T), v_t(\cdot)\big), \quad t \in [0,T], \;\; u(t) \in U, \qquad (3)$$

де $v_t(\cdot) = \{v(s): 0 \leq s \leq t\}$ - передісторія керування другого гравця до моменту t. Якщо, зокрема, $g(t) = A(t)z_0$, де $A(t)$ – матрична функція, така, що $A(0) = E$, E – одинична матриця, а $z(0) = z_0$, то можно вважати, що $u(t) = u(z_0, v_t(\cdot))$ і керування першого гравця являє собою певний тип квазістратегій [1, 2, 3].

Мета даного розділу – встановити для системи (1), (2) при умові інформованості типу (3) достатні умови можливості розв'язання задачі на користь гравця P за деякий гарантований час, оцінити цей час, а також знайти керування першого гравця, що дозволяють реалізувати цей результат.

Перейдемо до опису методу розв’язку задачі. Вихідні припущення про функції $g(t), \Omega(t,\vartheta), \varphi(u,v)$ дозволяють здійснити багато в чому вужі відомі для диференціальних ігор побудови [3,4,5,6], які коротко розглянемо.

Позначимо π ортопроектор, що діє з $\mathbb{R}^n$ в L. Прийнявши

$$\varphi(U,v) = \{\varphi(u,v): u \in U\},$$

Розглянемо багатозначні відображення

$$W(t,\vartheta,v) = \pi\Omega(t,\vartheta)\varphi(U,v),$$

$$W(t,\vartheta) = \bigcap_{v \in V} W(t,\vartheta,v)$$

відповідно на множинах $\Delta \times V$ і Δ, де

$$\Delta = \{(t,\vartheta): 0 \leq \vartheta \leq t \leq \infty\}.$$

Умова Понтрягіна. Багатозначне відображення $W(t,\vartheta)$ приймає непорожні значення на множині Δ.

В силу безперервності функції $\varphi(u,v)$ і умови $U \in K(\mathbb{R}^p)$ відображення $\varphi(U,v)$ безперервно по v у метриці Хаусдорфа [7,8]. Враховуючи припущення про матричну функцію $\Omega(t,\vartheta)$, можна зробити висновок [9], що багатозначне відображення $W(t,\vartheta,v)$ являється вимірним по ϑ і напівнеперервним згори по v.

Лема 1 Багатозначне відображення $W(t,\vartheta)$ вимірне по ϑ.

З умови Понтрягіна, леми 1 і теореми про вимірний селектор [10] випливає, що при будь-якому $t \geq 0$ існує хоча б один вимірний по ϑ селектор $\gamma(t,\vartheta) \in W(t,\vartheta)$. В силу припущень про параметри системи (1) такий селектор $\gamma(t,\vartheta)$ являється сумовною по ϑ, функцією при будь-якому фіксованому $t \geq 0$. Позначимо

$$\xi\big(t,g(t),\gamma(t,\cdot)\big) = \pi g(t) + \int_0^t \gamma(t,\vartheta)d\vartheta,$$

де $\gamma(t,\vartheta)$ – згаданий вище селектор.

За допомогою функції $\xi\big(t,g(t),\gamma(t,\cdot)\big)$ визначимо функцію $\alpha(t,\vartheta,v)$

$$\alpha(t,\vartheta,v) = \sup\{a \geq 0: [W(t,\vartheta,v) - \gamma(t,\vartheta)] \cap a\big[M - \xi\big(t,g(t),\gamma(t,\cdot)\big)\big] \neq \qquad 4)$$

і назвемо її розв'язуючою [10]. Надалі ця функція буде відігравати ключову роль.

Надалі нас буде цікавити залежність функції $\alpha(t,\vartheta,v)$ від сукупності змінних (ϑ,v). Тому зафіксуємо t і приймемо $\alpha(\vartheta,v) = \alpha(t,\vartheta,v)$. Будемо говорити, що функція $\alpha: [0,T] \times V \to \mathbb{R}_+$ є суперпозиційно вимірної, якщо для будь-якої вимірної функції $v(\vartheta), v: [0,T] \to V$, суперпозиція $\alpha\big(\vartheta,v(\vartheta)\big), \alpha: [0,T] \to \mathbb{R}_+$, є вимірною функцією від ϑ.

Лема 2 Нехай для системи (1) виконана умова Понтрягіна і для деяких $t,\gamma(t,\cdot)$

$$\xi(t,g(t),\gamma(t,\cdot)) \notin M.$$

Тоді розв'язуюча функція $\alpha(\vartheta,v) = \alpha(t,\vartheta,v)$ є суперпозиційно вимірної, а функція, а функція $inf_{v\in V}\alpha(\vartheta,v)$ вимірна по ϑ.

ЛІТЕРАТУРА

1. Красовський Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. – М.: Наука, 1974. – 455 с.
2. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. – М.: Наука, 1981. – 288 с.
3. Chikrii A.A. Conflict controlled processes. – Boston; London; Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997. – 427 p.
4. Чикрий А.А. Функционалы Минковского в теории преследования // Докл. РАН. – 1993. – 329, №3. – С. 281-284.
5. Чикрий А.А. Многозначные отображения и их селекторы в игровых задачах управления // Пробл. Управления и информатики. – 1994. – №1,2. – С.3-14.
6. Chikrii A.A. Quasilinear Controlled Processes unde Conflict // Dynamical Systems, 2, J. Math. Sci. – 1996. – 80, N 1. – P. 1489-1518.
7. Куратовский К. Топология. – М.: Мир, 1966. – 1. – 594 с.
8. Обен Ж.-П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ. – М.: Мир, 1984. – 512 с.
9. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. – М.: Наука, 1974. – 479 с.
10. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. – М.: Наука, 1988. – 280 с.