Ю. П. Красный,
доктор физико-математических наук, профессор,
Международный гуманитарный университет;
А. Б. Козин,
кандидат физико-математических наук, доцент,
Национальный университет «Одесская юридическая академия»;
О. Б. Папковская,
кандидат физико-математических наук, доцент,
Одесский национальный политехнический университет

РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННО ДЕФОРМИРУЕМОГО СОСТОЯНИЯ КОМПОЗИТНЫХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ИЗГИБЕ

Одной из актуальных проблем сегодня является расчет на прочность и жесткость композитных материалов, использующихся в современных конструкциях и технологиях. В работе рассматривается задача о расчёте напряженно–деформируемого состояния, возникающего при изгибе свободно опертой, прямоугольной в плане пологой оболочки с конечномерным тонким жестким включением. Предлагается метод, в результате которого строится эффективное приближенное решение, путем сведения задачи к системе линейных алгебраических уравнений.

Математическая постановка задачи об изгибе свободно опертой, прямоугольной в плане ($0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$) пологой оболочки с тонким жестким включением, расположенным на отрезке $y = b/2 \equiv l$, $c_1 \le x \le d$ ($0<c_1$; $d<a$) дана в работе [1]. В этой же работе задача сведена к системе интегральных уравнений:

$$\frac{-2c}{aEh}\int_{c_1}^{d}\sum_{n=1}^{\infty}X_6(t)\sin(\alpha t)\sin(\alpha x)*æ_{1n}dt+\frac{2}{aD}\int_{c_1}^{d}\sum_{n=1}^{\infty}\psi(t)\sin(\alpha t)*\sin(\alpha x)*æ_{2n}dt=\omega*(x),$$

$$\frac{-2}{a}\int_{c_1}^{d}\sum_{n=1}^{\infty}X_6(t)\sin(\alpha t)*\sin(\alpha x)*æ_{3n}dt+\frac{2Eh}{acD}\int_{c_1}^{d}\sum_{n=1}^{\infty}\psi(t)\sin(\alpha x)*\sin(\alpha t)*æ_{4n}dt=0. \qquad (1)$$

Здесь обозначено:

$$\alpha=\pi n a^{-1},\quad æ_{1n}=\operatorname{Im}G_{\alpha}^{0,2}(l,l)+\upsilon\alpha^2\operatorname{Im}G_{\alpha}(l,l)+ck_1\operatorname{Re}G_{\alpha}(l,l),$$

$$æ_{2n}=\operatorname{Re}G_{\alpha}(l,l),\Re_{4n}=\operatorname{Im}G_{\alpha}^{2.0}(l,l)+\upsilon\alpha^2\operatorname{Im}G_{\alpha}(l,l),$$

$$æ_{3n}=\operatorname{Re}G_{\alpha}^{2.2}(l,l)+ck_2\operatorname{Im}G_{\alpha}^{2.0}(l,l)+\upsilon\alpha^2\operatorname{Re}G_{\alpha}^{2.0}(l,l),$$

$$æ_{4n}=\upsilon\alpha^2\operatorname{Re}G_{\alpha}^{0,2}(l,l)+\upsilon ck_2\alpha^2\operatorname{Im}G_{\alpha}(l,l)+\alpha^4\upsilon^2\operatorname{Re}G_{\alpha}(l,l),$$

$$G_{\alpha}(y,\eta)=\frac{-\alpha^{-3}}{(\lambda^2-\mu^2)}\left(\frac{sh(\alpha\lambda\tau_1(\eta))sh(\alpha\lambda\tau_2(y))}{\lambda*sh(\alpha\lambda b)}-\frac{sh(\alpha\mu\tau_1(\eta))sh(\alpha\mu\tau_2(y))}{\mu*sh(\alpha\mu b)}\right),$$

$$\tau_1(\eta)=\begin{cases}b-\eta, y<\eta\\ \eta, y>\eta\end{cases};\quad \tau_2(y)=\begin{cases}y, y<\eta\\ b-y, y>\eta\end{cases};\quad c=\frac{\sqrt{12(1-\eta^2)}}{h};\quad X_6(x)=\int X_3(x)dx;$$

$$\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix}=\sqrt{1-\frac{ick_1}{2\alpha^2}\pm\sqrt{ic(k_2-k_1)-\frac{c^2k_1^2}{4\alpha^2}}};\quad G_{\alpha}^{m,n}(l,l)=\frac{\partial G_{\alpha}(x,y)}{\partial x^m\partial y^n}\quad при\, x=l,\ y=l.$$

$\langle S_y\rangle=-X_3(x)$ – скачки касательных усилий при переходе через включение, $\langle V_y\rangle=\psi(x)$ – скачки обобщенных поперечных сил, w – перемещения точек серединной поверхности в направлении оси z, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, i – комплексная мнимая единица, h – толщина оболочки, $D = Eh^3/(12(1-\nu^2))$ – изгибная жесткость, k_1, k_2 – главные кривизны оболочки вдоль осей x и y соответственно, φ – функция напряжений оболочки, $\operatorname{Re} G_\alpha(l,l)$ – действительная часть функции, а $\operatorname{Im} G_\alpha(l,l)$ – мнимая часть функции $G_\alpha(l,l)$.

На основании [1], можем эффективно решить эту систему следующим приближенным численным методом. Введем обозначения:

$$\overline{R}_1 = a^2(h*R_1);\ \overline{R}_2 = a^2/(h*R_2);\ \lambda_1 = a/b;\quad f(\overline{R}_1,\overline{R}_2,\lambda_1) = \frac{2^{-1}}{(\lambda^2-\mu^2)}(\lambda^{-1}th(\frac{n\lambda\lambda_1}{2\pi^{-1}}) - \mu^{-1}th(\frac{n\mu\lambda_1}{2\pi^{-1}}));$$

$$f_2(\overline{R}_1,\overline{R}_2,\lambda_1) = \frac{2^{-1}}{(\lambda^2-\mu^2)}(\lambda*th(\frac{n\lambda\lambda_1}{2\pi^{-1}}) - \mu*th(\frac{n\mu\lambda_1}{2\pi^{-1}}));\ \overline{\mathrm{R}}_{11} = \frac{\overline{\mathrm{R}}_1\sqrt{12(1-\nu^2)}}{2\pi^2 n^2};$$

$$f_6(\overline{R}_1,\overline{R}_2,\lambda_1) = \frac{2^{-1}}{(\lambda^2-\mu^2)}(\lambda^3 th(\frac{n\lambda\lambda_1}{2\pi^{-1}}) - \mu^3 th(\frac{n\mu\lambda_1}{2\pi^{-1}}));\quad æ_{6n} = \operatorname{Re} f(\overline{R}_1,\overline{R}_2,\lambda_1);$$

$$æ_{7n} = \operatorname{Re} f_6(\overline{R}_1,\overline{R}_2,\lambda_1) + 2\overline{R}_{11}\operatorname{Im} f_2(\overline{R}_1,\overline{R}_2,\lambda_1) + 2\nu\operatorname{Re} f_2(\overline{R}_1,\overline{R}_2,\lambda_1) + 2\nu\overline{R}_{11}\operatorname{Im} f(\overline{R}_1,\overline{R}_2,\lambda_1) + \nu^2\operatorname{Im} f(\overline{R}_1,\overline{R}_2,\lambda_1);$$

$$æ_{5n} = \operatorname{Im} f_2(\overline{R}_1,\overline{R}_2,\lambda_1) + \nu\operatorname{Im} f(\overline{R}_1,\overline{R}_2,\lambda_1) + \overline{R}_{11}\operatorname{Re} f(\overline{R}_1,\overline{R}_2,\lambda_1);\ æ_{8n} = \operatorname{Im} f_2(\overline{R}_1,\overline{R}_2,\lambda_1) + \nu\operatorname{Im} f(\overline{R}_1,\overline{R}_2,\lambda_1);$$

$$t = \frac{d-c_1}{2}\tau + \frac{d+c_1}{2};\ x = \frac{d-c_1}{2}z + \frac{d+c_1}{2};\quad \Psi_R(\tau) = (d-c_1)\Psi(t);\ \mathrm{X}_R(\tau) = \mathrm{X}_6(t);$$

$$\varepsilon = (d-c_1)a^{-1};\ \ \sigma = \pi n\varepsilon 2^{-1}; H = h*a^{-1}*(12(1-\nu^2))^{-1/2}. \qquad (2)$$

Предполагая, что включение расположено симметрично относительно прямой $x=a/2$ и внешняя нагрузка приложена симметрично относительно этой прямой, получаем, что $\Psi_R(\tau)$ и $\mathrm{X}_R(\tau)$ будут четными по τ, а

$$\omega^*(x) = -\frac{W_0\sqrt{R_1^2-(x-a/2)^2}}{R_1} \approx -W_0$$

С учетом (2) система (1) перепишется следующим образом:

$$-\pi^2 H\varepsilon\int_{-1}^{1} X_R(\tau)\sum_{n=1,3,5...}^{\infty}\cos(\sigma z)\cos(\sigma\tau)\frac{æ_{5n}}{n}d\tau + \int_{-1}^{1}\Psi_R(\tau)\sum_{n=1,3,5...}^{\infty}\cos(\sigma z)\cos(\sigma\tau)\frac{æ_{6n}}{n^3}d\tau = -W_0\pi^3 a^{-2}D,$$

$$-\pi^2 H\varepsilon\int_{-1}^{1} X_R(\tau)\sum_{n=1,3,5...}^{\infty}\cos(\sigma z)\cos(\sigma\tau)næ_{7n}d\tau + \int_{-1}^{1}\Psi_R(\tau)\sum_{n=1,3,5...}^{\infty}\cos(\sigma z)\cos(\sigma z)\frac{æ_{8n}}{n}d\tau = 0. \qquad (3)$$

На основании асимптотических оценок, полученных в [1], решения системы (3) ищем в виде рядов:

$$\Psi_R(\tau) = \sum_{j=0}^{\infty}\psi_j p_j(\tau);\ X_R(\tau) = \sum_{j=0}^{\infty}\chi_j R_j(\tau); \qquad (4)$$

$$p_0(\tau) = (1-\tau^2)^{-1/2};\ p_j(\tau) = \frac{2(2j)!\sqrt{\pi}P_{2j}^{-3/2,-3/2}(\tau)}{\Gamma(2j-1/2)(1-\tau^2)^{3/2}};\ (j=\overline{1,\infty});\quad R_j(\tau) = \sqrt{1-\tau^2}U_{2j}(\tau).$$

$P_j^{\alpha,\beta}(\tau)$ – многочлены Якоби, $U_j(\tau)$ – многочлены Чебышева второго рода, ψ_j, χ_j – неизвестные постоянные. Подставляя (4) в (3), домножая первое уравнение системы (3) на $p_m(z)$, второе – на $R_m(z)$ и интегрируя обе части по z от –1 до 1, получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=0}^{\infty}\chi_j e_{mj} + \sum_{j=0}^{\infty}\psi_j c_{mj} = -W_0\pi^2 a^{-2}D\delta_{0m} \equiv f_m,\ (m=\overline{0,\infty}),$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}\chi_j h_{mj} + \sum_{j=0}^{\infty}\psi_j s_{mj} = 0,\ (m=\overline{0,\infty}), \qquad (5)$$

где $c_{00} = \sum_{n=1,3,5...}^{\infty} J_0^2(\sigma)\frac{æ_{6n}}{n^3},\ c_{0j} = c_{j0} = (-1)^j \sum_{n=1,3,5...}^{\infty} \sigma J_0(\sigma) J_{2j-1}(\sigma)\frac{æ_{6n}}{n^3},\ (j \geq 1)$,

$$c_{mj} = (-1)^{m+j} \sum_{n=1,3,5...}^{\infty} \sigma^2 J_{2j-1}(\sigma) J_{2j-1}(\sigma)\frac{æ_{6n}}{n^3},\ (m, j \geq 1),$$

$$e_{0j} = e_{j0} = \frac{\varepsilon H \pi^2}{(-1)^{j+1}(2j+1)^{-1}} \sum_{n=1,3,5...}^{\infty} J_0(\sigma) J_{2j+1}(\sigma)\sigma^{-1}\frac{æ_{5n}}{n},\ (j \geq 0),$$

$$e_{mj} = \frac{\varepsilon H(2j+1)}{\pi^{-2}(-1)^{m+j+1}} \sum_{n=1,3,5...}^{\infty} J_{2m+1}(\sigma) J_{2j+1}(\sigma)\sigma^{-1}\frac{æ_{5n}}{n},\ (m \geq 1, j \geq 0),$$

$$s_{m0} == (-1)^m (2m+1) \sum_{n=1,3,5...}^{\infty} J_0(\sigma) J_{2m+1}(\sigma)\sigma^{-1}\frac{æ_{8n}}{n},\ (m \geq 0),$$

$$s_{mj} = (-1)^{m+j}(2m+1) \sum_{n=1,3,5...}^{\infty} J_{2m+1}(\sigma) J_{2j+1}(\sigma)\frac{æ_{8n}}{n},\ (m \geq 0, j \geq 1),$$

$$h_{mj} = \frac{\varepsilon H(2j+1)(2m+1)}{\pi^{-2}(-1)^{m+j+1}} \sum_{n=1,3,5...}^{\infty} J_{2m+1}(\sigma) J_{2j+1}(\sigma)\sigma^{-2} n æ_{7n},\ (m \geq 0, j \geq 0)$$

Здесь использованы формулы В 4.4, В 4.5, В 4.6 [2].

Запишем условия равновесия для включения:

$$\int_{c_1}^{d} < S(x,l) > dx = 0;\ \int_{c_1}^{d} \Psi(\xi) d\xi = P. \qquad (6)$$

Первое условие из (6) выполняется тождественно в силу симметрии задачи, второе условие из (6) с учетом (2) и (4) дает:

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \Psi_R(\xi) d\xi = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty} \psi_j \int_{-1}^{1} p_j(\tau) d\tau = \frac{\pi}{2}\psi_0 = P. \qquad (7)$$

Как видно из (5), искомые коэффициенты будут пропорциональны величине $W_0 D a^{-2}$, т.е. $\psi_j = \tilde{\alpha} D W_0 a^{-2}, (j = \overline{0,\infty})$. Таким образом, решая систему (5), с ее правой частью, равной $-\pi^2 \delta_{0m}, m = \overline{0,\infty}$, величину W_0 находим из условия равновесия включения (7) с помощью формулы: $W_0 = a^2 D^{-1} 2P\pi^{-1}\tilde{\alpha}_0^{-1} = a^2 D^{-1} P\alpha$, где $\alpha = 2\pi^{-1}\tilde{\alpha}_0^{-1}$.

На этом завершается реализация алгоритма построения приближенного решения данной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Козин А.Б., Папковская О.Б. О решении краевых задач композитных пологих оболочек. Сборник научных трудов SWorld. – Выпуск 4. Том 4. – Иваново: Маркова АД, 2013 – с. 33-37.
2. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. – М.: Наука, 1982. – 344 с.